

Banach 空间中立型泛函微分方程的概周期温和解^{*}

张留伟

(中山大学中法核工程与技术学院, 广东 珠海 519082)

摘 要: 借助于一般的谱分解技巧, 利用线性算子半群理论研究了 Banach 空间 X 中立型泛函微分方程一致连续的有界温和解的存在性与唯一性, 得到了当 X 没有与 c_0 同构的子空间时方程概周期温和解存在与唯一的谱条件, 推广了线性微分方程的现有结果。

关键词: 概周期; Carleman 谱; 线性算子半群; 中立型泛函微分方程

中图分类号: O174 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2016) 01-0030-05

Almost periodic mild solutions to functional differential equations of neutral type in Banach space

ZHANG Liuwei

(Sino-French Institute of Nuclear Engineering and Technology, Sun Yat-sen University, Zhuhai 519082, China)

Abstract: With the general spectral decomposition techniques and by means of the linear operator semigroups theory, the existence and uniqueness of uniformly continuous mild solutions to the functional differential equations of neutral type in Banach space X are studied. The spectrum conditions which imply the existence and uniqueness of almost periodic mild solutions to the equations are obtained when X has no subspace isomorphic to c_0 . The results extend recent results of the linear differential equations.

Key words: almost periodicity; Carleman spectrum; linear operator semigroups; functional differential equations of neutral type

周期解与概周期解的存在性问题一直是微分方程研究的重要课题之一^[1-2], 对于线性常微分方程而言, Massera 于 1950 年证明了有界解的存在蕴涵周期解的存在。与周期系统不同, 即便对于标量概周期常微分方程, 所有解有界也未必蕴涵概周期解存在。因此, 研究概周期微分方程概周期解的存在性时, 除了假设解有界外还必须附加其他条件。一方面, 对于概周期线性常微分方程而言, 在附加了分离性的假设下, Favard 首先证明了其概周期解的存在性, Kato 建立了有限时滞概周期微分方程的分离性定理, 袁荣^[3]把 Favard 理论推广到逐段常变量微分方程。对于一般的 Banach 空间中的微分方程, Arendt^[4]证明了在满足非齐次项 Carleman 谱

可数的条件下一阶和二阶 Cauchy 问题概周期解的存在性。Batty^[5]和 Toshiki Naito^[6]利用单调算子演化半群理论和 Carleman 谱分解技巧研究了 Banach 空间中周期演化方程

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t)$$

概周期解的存在性与唯一性。

本文研究抽象中立型时滞微分方程

$$\frac{d(u(t) + Fu_t)}{dt} = A(t)x + f(t) \quad (1)$$

概周期解的存在性, 其中 A 是 C_0 半群 $(T(t))_{t \geq 0}$ 的无穷小生成元,

$$u_t \in C([-r, 0], X), \quad u_t(\theta) = u(t + \theta)$$

* 收稿日期: 2015-09-14

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11271379)

作者简介: 张留伟 (1982 年生), 男; 研究方向: 泛函微分方程; E-mail: zhliuw@mail.sysu.edu.cn

$r > 0$ 为一给定的实数, $F: C([-r, 0], X) \rightarrow X$ 是有界线性算子, 且 $R(f) \subset D(A)$, f 是定义在 $\mathbb{R}$ 上取值于 Banach 空间 X 的概周期函数。借助于一般的谱分解技巧, 利用线性算子半群理论, 得到了方程 (1) 概周期温和解存在与唯一的谱条件, 推广了非齐次线性微分方程的有关结果并给出了所得结果的应用。

1 预备知识

令 S^1 表示复平面中的单位圆。 $\operatorname{Re} z$ 表示复数 z 的实部。对给定的两个复 Banach 空间 X, Y , $L(X, Y)$ 表示 X 到 Y 的所有有界线性算子所做成的 Banach 空间。 $\sigma(T)$, $\rho(T)$, $R(\lambda, T)$ 分别表示算子 T 的谱, 预解集和预解。 $BC(\mathbb{R}, X)$, $BUC(\mathbb{R}, X)$ 分别表示 X 值有界连续函数空间和有界一致连续函数空间, 并赋以范数 $\|x\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|x(t)\|$, 则两者均为 Banach 空间。

对 $u \in BUC(\mathbb{R}, X)$, 记

$$SP(u) := \{\xi \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0, \exists f \in L^{-1}(\mathbb{R}), \operatorname{supp}(\mathcal{F}f) \subset (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon), f * u = 0\}$$

其中, $(\mathcal{F}f)(s) := \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-ist) f(t) dt$, $f * u(s) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(s-t) u(t) dt$, 称 $SP(u)$ 为 u 的 Carleman 谱, 简称 u 的谱。

引理 1^[7] 设 $u \in BUC(\mathbb{R}, X)$, 则 $\xi \in SP(u)$ 当且仅当 u 的 Fourier-Carleman 变换

$$\hat{u}(\lambda) = \begin{cases} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} u(t) dt, \operatorname{Re} \lambda < 0 \\ -\int_0^{+\infty} e^{\lambda t} u(-t) dt, \operatorname{Re} \lambda > 0 \end{cases}$$

在 $i\xi$ 的邻域无全纯扩张。

引理 2^[7-8] 设 $f, g_n \in BUC(\mathbb{R}, X)$, 当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $g_n \rightarrow f$, 则

- (i) $SP(f)$ 是闭的,
- (ii) $SP(f(\cdot + h)) = SP(f)$,
- (iii) 若 $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, 则 $SP(\alpha f) = SP(f)$,
- (iv) 若 $\forall n \in \mathbb{N}, SP(f_n) \subset \Lambda$, 则 $SP(f) \subset \bar{\Lambda}$,

其中 $\bar{\Lambda}$ 表示 Λ 的闭包,

(v) 若 A 是闭算子, $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) \in D(A)$, $Af(\cdot) \in BUC(\mathbb{R}, X)$, 则 $SP(Af) \subset SP(f)$,

(vi) $\forall \psi \in L^1(\mathbb{R}), SP(\psi * f) \subset SP(f) \cap \operatorname{supp}(\mathcal{F}\psi)$,

(vii) $\forall \psi \in BC(\mathbb{R}, X), SP(\psi + f) \subset SP(f) \cup SP(\psi)$ 。

引理 3^[5] A 是 Banach 空间 Y 上 C_0 等距群 $U = (U(t))_{t \in \mathbb{R}}$ 的无穷小生成元, $z \in Y, \xi \in \mathbb{R}$, 存在 $\mathbb{C}$ 中 $i\xi$ 的一个邻域 V 和全纯函数 $h: V \rightarrow Y$, 使得 $h(\lambda) = R(\lambda, A)z, \forall \lambda \in V, \operatorname{Re} \lambda > 0$, 则 $i\xi \in \rho(A_z)$, 其中 A_z 是 U 限制在 $\overline{\operatorname{span}\{U(t)z, t \in \mathbb{R}\}} \subset Y$ 上的无穷小生成元。

对于 $BUC(\mathbb{R}, X)$ 上的平移群 $(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$, 即 $S(t)u(s) = u(t+s)$, 有以下结论。

引理 4^[9] $iSP(u) = D_u$, 其中 D_u 是 $(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$ 限制在 $M_u := \operatorname{span}\{S(t)u, t \in \mathbb{R}\}$ 上的无穷小生成元。

定义 1 对 $\varepsilon > 0$, 存在 $l(\varepsilon) > 0$, 对 $\forall a \in \mathbb{R}, \exists \tau \in (a, a+l)$, 使得

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \|f(t+\tau) - f(t)\| < \varepsilon$$

则称 $\varepsilon > 0$ 是概周期函数。所有 X 值概周期函数记为 $AP(\mathbb{R}, X)$, 有 $AP(\mathbb{R}, X) \subset BUC(\mathbb{R}, X)$ 。

设 $f \in AP(\mathbb{R}, X)$, 称使得

$$a(\lambda, f) := \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T f(t) e^{-i\lambda t} dt$$

不为零的 λ 为 f 的 Fourier 指数, $a(\lambda, f)$ 为与 λ 相应的 Fourier 系数。 f 的所有 Fourier 系数的集合记为 $\sigma_b(f)$, 则 $\sigma_b(f)$ 至多为可数集。

由文 [5] 知

$$SP(f) = \overline{\sigma_b(f)}$$

记 c_0 表示所有以范数 $\|\kappa\| = \max\{|\xi_i|\}$, 收敛的数列 $\kappa = \{\xi_i\} (i = 1, 2, \dots)$ 构成的 Banach 空间。若数 $f: \mathbb{R} \rightarrow X$ 是一致连续的, X 没有与 c_0 同构的子空间, 并且 $SP(f)$ 是可数的, 则 f 是概周期的。

定义 2 连续函数 u 称为方程 (1) 的温和解, 如果对所有 $t \geq s$, 有

$$u(t) + Fu_t = T(t-s)(u(s) + Fu_s) + \int_s^t T(t-r)(f(r) - AFu_r) dr \quad (2)$$

其中, $(T(t))_{t \geq 0}$ 是以 A 为无穷小生成元的 C_0 半群。

定义 3 称 $BUC(\mathbb{R}, X)$ 上的有界线性算子 H 是自治的, 如果 H 与 $S(\tau)$ 可交换, 即

$$HS(\tau) = S(\tau)H, \forall \tau \in \mathbb{R}$$

对 $u \in BUC(\mathbb{R}, X)$, 记 $\mathcal{F}u(r) := Fu_r$, 易见 $\mathcal{F}$ 是自治算子。记 $T^h u(t) := T(h)u(t-h)$, 则称 T^h 为 C_0 半群 $(T(t))_{t \geq 0}$ 的演化半群, 其无穷小生成元记为 G 。

引理 5 设 $(T^h)_{h \geq 0}$ 是关于 C_0 半群 $(T(t))_{t \geq 0}$ 的演化半群, Q 是 $BUC(\mathbb{R}, X)$ 中所有 $(T^h)_{h \geq 0}$ 的强连续点的集合, 则

(i) 若 $u \in BUC(\mathbb{R}, X)$ 是方程 (1) 的温和

解, 则 $u \in Q$,

(ii) 设 $(T^h)_{h \geq 0}$ 的无穷小生成 G , 有 $G(u + \mathcal{F}u) = A\mathcal{F}u - f$,

(iii) $AP(\mathbb{R}, X) \subset Q$.

证明 (i) 由于 u 是方程 (1) 的温和解, 有

$$\|u(t) - T(h)u(t-h)\| =$$

$$\left\| T(h)Fu_{t-h} + \int_{t-h}^t T(t-r)(f(r) - AFu_r)dr - Fu_t \right\| \leq$$

$$\|T(h)Fu_{t-h} - Fu_t\| +$$

$$\left\| \int_{t-h}^t T(t-r)(f(r) - AFu_r)dr \right\| \leq$$

$$\|T(h)Fu_{t-h} - Fu_{t-h}\| + \|Fu_{t-h} - Fu_t\| +$$

$$\left\| \int_{t-h}^t T(t-r)(f(r) - AFu_r)dr \right\| \leq$$

$$\|T(h)Fu_{t-h} - Fu_{t-h}\| + \|Fu_{t-h} - Fu_t\| + hNe^{\omega h}$$

由 $T(h)$ 的强连续性, F 的有界变差性, 及 h, ω 与 t 无关, 知

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \|T^h u - u\| =$$

$$\limsup_{h \rightarrow 0^+} \sup_{t \in \mathbb{R}} \|T(h)u(t-h) - u(t)\| = 0$$

即 $(T^h)_{h \geq 0}$ 在 u 强连续。

(ii) 由于 u 是方程 (1) 的温和解, 得

$$\int_0^h T^r G(u + \mathcal{F}u)dr = T^r(u + \mathcal{F}u) - (u + \mathcal{F}u) =$$

$$T(h)u(t-h) + T(h)Fu_{t-h} - u(t) - Fu_t =$$

$$- \int_{t-h}^t T(t-r)(f(r) - AFu_r)dr =$$

$$- \int_0^h T(r)(f(t-r) - AFu_{t-r})dr =$$

$$- \int_0^h T^r(f - AFu)dr$$

由线性算子半群的理论^[10], 得知 $G(u + \mathcal{F}u) = A\mathcal{F}u - f$.

(iii) 参见文 [11]。

2 主要结论

本文的主要结论是定理 1 与定理 2, 在给出主要定理之前, 先证明一些引理。

令

$$Fu_t := \int_{-r}^0 d\eta(s)u(t+s)$$

其中 $\eta: [-r, 0] \rightarrow L(X)$ 是有界变差的。对 $\lambda \in \mathbb{R}$, 记

$$\Delta(\lambda) := \lambda I - A + \lambda B_\lambda$$

其中 $B_\lambda = \int_{-r}^0 d\eta(s)e^{\lambda s}$ 。记

$$\rho(A, \lambda) := \{\lambda \in \mathbb{R} : \exists \Delta^{-1}(\lambda) \in L(X)\}$$

引理 6 $\rho(A, \lambda)$ 是开的, Δ^{-1} 在 $\rho(A, \lambda)$ 中解

析。

证明 易见, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 有 $\Delta(\lambda) - \Delta(\mu) \in L(X)$, 且

$$\|\Delta(\lambda) - \Delta(\mu)\| =$$

$$\|(\lambda - \mu)I + \lambda \int_{-r}^0 d\eta(s)e^{\lambda s} - \mu \int_{-r}^0 d\eta(s)e^{\mu s}\| \leq$$

$$|\lambda - \mu| + \left\| \lambda \int_{-r}^0 d\eta(s)e^{\lambda s} - \mu \int_{-r}^0 d\eta(s)e^{\mu s} \right\| +$$

$$\left\| \lambda \int_{-r}^0 d\eta(s)e^{\mu s} - \mu \int_{-r}^0 d\eta(s)e^{\mu s} \right\| \leq$$

$$|\lambda - \mu| + |\lambda| \left\| \int_{-r}^0 d\eta(s)(e^{\lambda s} - e^{\mu s}) \right\| +$$

$$|\lambda - \mu| \left\| \int_{-r}^0 d\eta(s)e^{\mu s} \right\| \leq |\lambda - \mu| +$$

$$|\lambda| \|\eta\|_{\text{var}[-r, 0]} r e^{\max\{|\lambda|, |\mu|\}} |\lambda - \mu| +$$

$$|\lambda - \mu| \left\| \int_{-r}^0 d\eta(s)e^{\mu s} \right\|$$

设 $\lambda \in \rho(A, \lambda)$, 若 $|\lambda - \mu|$ 充分小, 则有

$$|(\Delta(\lambda) - \Delta(\mu))\Delta^{-1}(\lambda)| < 1$$

因此,

$$(I - \Delta(\lambda) - \Delta(\mu))\Delta^{-1}(\lambda))^{-1} \in L(X)$$

由等式

$$\Delta(\mu) = (I - (\Delta(\lambda) - \Delta(\mu))\Delta^{-1}(\lambda))\Delta(\lambda)$$

知, $\mu \in \rho(A, \lambda)$, 故 $\rho(A, \lambda)$ 在 $\mathbb{C}$ 中是开的。

为证 Δ^{-1} 的解析性, 只须证 $\Delta^{-1}(\lambda)$ 对 $\forall \lambda \in \rho(A, \lambda)$ 是可微的。设 $\lambda \in \rho(A, \eta)$, 取 $h \in \mathbb{R}$, 使得 $\lambda + h \in \rho(A, \eta)$, 注意到, 当 $h \rightarrow 0$ 时,

$$\Delta(\lambda) - \Delta(\lambda + h) = -hI + \lambda \int_{-r}^0 d\eta(s)e^{\lambda s} \cdot$$

$$[1 - e^{hs}] - h \int_{-r}^0 d\eta(s)e^{(\lambda+h)s} \rightarrow 0$$

且

$$\frac{\Delta(\lambda) - \Delta(\lambda + h)}{h} =$$

$$-I - \frac{\lambda}{h} \int_{-r}^0 d\eta(s)e^{\lambda s} [1 - e^{hs}] - \int_{-r}^0 d\eta(s)e^{(\lambda+h)s} \rightarrow$$

$$-I - \lambda \int_{-r}^0 d\eta(s)se^{\lambda s}$$

因此, 当 $h \rightarrow 0$ 时,

$$\frac{1}{h} [\Delta^{-1}(\lambda + h) - \Delta^{-1}(\lambda)] =$$

$$\Delta^{-1}(\lambda)(I - (\Delta(\lambda) - \Delta(\mu))\Delta^{-1}(\lambda))^{-1} \cdot$$

$$\frac{\Delta(\lambda) - \Delta(\lambda + h)}{h} \Delta^{-1}(\lambda) \rightarrow$$

$$\Delta^{-1}(\lambda) \left(-I - \lambda \int_{-r}^0 d\eta(s)se^{\lambda s} \right) \Delta^{-1}(\lambda)$$

引理 7 设 $u \in \text{BUC}(\mathbb{R}, X)$ 是方程 (1) 的温和解, 则

$$SP(u) \subset \{\xi \in \mathbb{R},$$

$$\mathfrak{A}\Delta^{-1}(i\xi) \in L(X)\} \cup SP(f) \quad (3)$$

证明 由 u 是方程(1)的温和解, 知 $\forall t \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^t u(r) dr \in D(A), \text{ 且}$$

$$u(t) + Fu_t = u(0) + \mathcal{F}u(0) + A \int_0^t u(s) ds + \int_0^t f(s) ds$$

即

$$u(t) = A \int_0^t u(s) ds - \mathcal{F}u(t) +$$

$$\int_0^t f(s) ds + u(0) + \mathcal{F}u(0)$$

对 u 进行拉普拉斯变换, 得

$$\hat{u}(\lambda) = \frac{1}{\lambda} A \hat{u}(\lambda) - \int_0^\infty e^{-\lambda t} \int_{-r}^0 d\eta(s) u(t+s) dt +$$

$$\frac{1}{\lambda} \hat{f}(\lambda) + \frac{1}{\lambda} u(0) + \frac{1}{\lambda} \mathcal{F}u(0) =$$

$$\frac{1}{\lambda} A \hat{u}(\lambda) - \int_{-r}^0 d\eta(s) \int_0^\infty e^{-\lambda t} u(t+s) dt +$$

$$\frac{1}{\lambda} \hat{f}(\lambda) + \frac{1}{\lambda} u(0) + \frac{1}{\lambda} \mathcal{F}u(0) =$$

$$\frac{1}{\lambda} A \hat{u}(\lambda) - \int_{-r}^0 d\eta(s) e^{\lambda s} \int_s^\infty e^{-\lambda t} u(t) dt +$$

$$\frac{1}{\lambda} \hat{f}(\lambda) + \frac{1}{\lambda} u(0) + \frac{1}{\lambda} \mathcal{F}u(0) =$$

$$\frac{1}{\lambda} A \hat{u}(\lambda) - \int_{-r}^0 d\eta(s) e^{\lambda s} \int_s^0 e^{-\lambda t} u(t) dt -$$

$$\hat{u}(\lambda) \int_{-r}^0 d\eta(s) e^{\lambda s} + \frac{1}{\lambda} \hat{f}(\lambda) +$$

$$\frac{1}{\lambda} u(0) + \frac{1}{\lambda} \mathcal{F}u(0)$$

记

$$g(\lambda) = u(0) + \mathcal{F}u(0) - \lambda \int_{-r}^0 d\eta(s) e^{\lambda s} \int_s^0 e^{-\lambda t} u(t) dt$$

则

$$(\lambda I - A + \lambda B_\lambda) \hat{u}(\lambda) = \hat{f}(\lambda) + g(\lambda)$$

显然, $g(\lambda)$ 在整个复平面上有全纯扩张。由于

$$\hat{u}(\lambda) = (\lambda I - A + \lambda B_\lambda)^{-1} (\hat{f}(\lambda) + g(\lambda))$$

设 $\xi \notin SP(f)$, $i\xi \in \rho(A, \eta)$ 及引理 6, 知 $\hat{u}(\lambda)$ 在 $i\xi$ 的邻域有全纯扩张, 即 $\xi \notin SP(u)$ 。从而,

$$SP(u) \subset \{\xi \in \mathbb{R}, \mathfrak{A}\Delta^{-1}(i\xi) \in L(X)\} \cup SP(f)$$

为简便起见, 记

$$\sigma_i(\Delta) := \{\xi \in \mathbb{R}, \mathfrak{A}\Delta^{-1}(i\xi) \in L(X),$$

$$M := \{v \in \text{BUC}(\mathbb{R}, X) : \sigma(v) := \overline{\sigma^{iSP(v)}} \subset S_1 \cup S_2\}$$

其中 $S_1, S_2 \subset S^1$ 是单位圆的两个不相交的闭子集。

记 $M_v := \text{span}\{S(t)v, t \in \mathbb{R}\}$, 有以下引理:

引理 8^[6] 在上述假设下, 有 $M = M_1 \oplus M_2$,

其中 $v \in M_i$, 当且仅当 $\sigma(v) \subset S_i, i = 1, 2$ 。

此外, 对于 $\text{BUC}(\mathbb{R}, X)$ 上的自治算子 G , 有 $GM \subset M, GM_i \subset M_i, i = 1, 2$ 。

注 1 对概周期函数仍有类似上述分解。

引理 9 设 $u \in \text{BUC}(\mathbb{R}, X)$ 是方程 (1) 的温和解, 其中 $f \in AP(\mathbb{R}, X)$, 则 $SP(u) \subset SP(f)$ 。

证明 由引理 8 知, 若 B 是 $\text{BUC}(\mathbb{R}, X)$ 上的自治算子, 对 $u \in \text{BUC}(\mathbb{R}, X)$, 有 $SP(Bu) \subset SP(u)$ 。由引理 5 及引理 2, 有

$$SP(f) = SP(-f) = SP(G(u + \mathcal{F}u) - A \mathcal{F}u) =$$

$$SP\left(\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T^h(u + \mathcal{F}u) - (u + \mathcal{F}u)}{h} - A \mathcal{F}u\right) =$$

$$SP\left(\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T^h u - u}{h} + \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T^h \mathcal{F}u - \mathcal{F}u}{h} - A \mathcal{F}u\right) \subset SP(u)$$

定理 1 若

$$\overline{\exp(i\sigma_i(\Delta))} \setminus \overline{\exp(iSP(f))} \quad (4)$$

是闭的, 且方程 (1) 在整个实数轴上存在一致连续的有界温和解, 则方程 (1) 存在一个一致连续的有界温和解 ω , 使得 $\overline{\exp(i\sigma_i(\Delta))} \subset \overline{\exp(iSP(f))}$ 。此外, 如果还满足

$$\overline{\exp(i\sigma_i(\Delta))} \cap \overline{\exp(iSP(f))} = \emptyset \quad (5)$$

则此解 ω 是唯一的, 即若存在方程 (1) 的温和解 v , 使得 $\overline{\exp(i\sigma_i(\Delta))} \subset \overline{\exp(iSP(f))}$, 则 $v = \omega$ 。

证明 有引理 7, 知 $SP(u) \subset \sigma_i(\Delta) \cup SP(f)$, 记 $A := \overline{\exp(i\sigma_i(\Delta))} \cup \overline{\exp(iSP(f))}$, 令 $S_1 = \overline{\exp(iSP(f))}$, $S_2 = \overline{\exp(i\sigma_i(\Delta))} \setminus \overline{\exp(iSP(f))}$, 由引理 8, 知存在投影 $P: M \rightarrow M_1$, 且 P 与 $\mathcal{F}, T^h$ 可交换。因此,

$$PG(u + \mathcal{F}u) = P \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T^h(u + \mathcal{F}u) - (u + \mathcal{F}u)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{PT^h(u + \mathcal{F}u) - (u + \mathcal{F}u)}{h} =$$

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{T^h P(u + \mathcal{F}u) - P(u + \mathcal{F}u)}{h} =$$

$$G(Pu + \mathcal{F}Pu) = A \mathcal{F}Pu - Pf$$

注意到 $Pf = f$, 知 Pu 也是方程 (1) 的温和解。

下证唯一性。设 $v \in \text{BUC}(\mathbb{R}, X)$ 是方程 (1) 的另一温和解, 使得 $\overline{\exp(iSP(v))} \subset \overline{\exp(iSP(f))}$, 则 $\omega - v$ 是方程 (1) 对应齐次方程的解, 因此, 有 $SP(\omega - v) \subset \sigma_i(\Delta)$ 。注意到

$$\overline{\exp(iSP(\omega - v))} \subset \overline{\exp(i\sigma_i(\Delta))} \cap \overline{\exp(iSP(f))} = \emptyset$$

知 $\omega - v = 0$, 故 $\omega = v$ 。

由文 [12] 及定理 1, 容易得到下述定理。

定理 2 若

$$\overline{\exp(i\sigma_i(\Delta))} \cap \overline{\exp(iSP(f))} \quad (6)$$

是闭的, X 没有与 c_0 同构的子空间, 且 $e^{iSP(f)}$ 是可数的, 则方程 (1) 存在一温和的概周期解 ω , 使得 $\overline{\exp(iSP(\omega))} \subset \overline{\exp(iSP(f))}$ 。此外, 如果方程 (1) 存在一个一致连续的有界温和解, 并有 (6) 成立, 则此解 ω 还是唯一的。

注 2 当 $F = 0$ 时, 由本文的定理 2 退化为文 [6] 中定理 3.5; 而当 F 是一般的常差分算子时, 我们给出所得结论的一个简单的应用。

例 1 考虑中立型方程

$$\frac{d}{dt}(u(t) - qu(t)) = -u(t) + \sin(2\pi t) \quad (7)$$

其中, $0 < q < 1$ 。此时, $X = \mathbb{R}$, 没有与 c_0 同构的子空间。 $A = -1$, $C = C([-1, 0], \mathbb{R})$, $\varphi \in C$, $F\varphi = -q\varphi(-1)$, $f(t) = \sin(2\pi t)$ 。集合 $\sigma_i(\Delta)$ 由下式确定

$$\lambda + 1 - \lambda q e^{-\lambda} = 0 \quad (8)$$

令 $\lambda = i\xi$, 注意到 $\exp(i\xi) = \cos \xi + i \sin \xi$, 代入 (8) 式, 得

$$i\xi + 1 - i\xi q(\cos \xi - i \sin \xi) = 0$$

即

$$\begin{cases} \xi - \xi q \cos \xi = 0 \\ 1 - \xi q \sin \xi = 0 \end{cases} \quad (9)$$

明显 $\xi \neq 0$, 由 (9) 式

$$\xi \tan(\xi) = 1 \quad (10)$$

方程 (10) 的解是可数的, 且解 $\xi \notin \left\{ \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$,

注意到 $SP(f) \subset \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ (见文 [13])。由定理 2 知, 方程 (7) 存在概周期温和解。

参考文献:

- [1] LI W G, LLIBRE J, WU H. Polynomial and linearized normal forms for almost periodic differential systems [J]. Discrete Contin Dyn Syst, 2015, 36(1): 345–360.

- [2] FIGUEROA P, PINTO M. Poincaré's problem in the class of almost periodic type functions [J]. Bull Belg Math Soc Simon Stevin, 2015, 22(2): 177–198.
- [3] YUAN R. On Favard's theorems [J]. J Differential Equations, 2010, 249(8), 1884–1916.
- [4] ARENDT W, BATTY C J K. Almost periodic solutions of first-and second-order Cauchy problems [J]. J Differential Equations, 1997, 137: 363–383.
- [5] BATTY C J K, HUTTER W, RÄBINGER F. Almost periodic of mild solutions of inhomogeneous periodic Cauchy problems [J]. J Differential Equations, 1999, 156: 309–327.
- [6] NAITO T, MINH N V, SHIN J S. New spectral criteria for almost periodic solutions of evolution equations [J]. Studia Math, 2001, 142: 97–111.
- [7] NAITO T, MINH N V. Evolution semigroups and spectral criteria for almost periodic solutions of periodic evolution equations [J]. J Differential Equations, 1999, 152: 358–376.
- [8] PRÜSS J. Evolutionary integral equations and applications [M]. Basel: Birkhäuser, 1993.
- [9] VU Q P. Almost periodic solutions of Volterra equations [J]. Differential Integral Equations, 1994, 7: 1083–1093.
- [10] DAVIES E B. One-parameter semigroups [M]. London: Academic Press, 1980.
- [11] PAZY A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations [M]. Berlin/New York: Springer-Verlag, 1983.
- [12] LEVITAN B M, ZHIKOV V V. Almost periodic functions and differential equations [M]. Moscow: Moscow Univ Publ House, 1978 [English translation by Cambridge Univ Press, 1982].
- [13] HINO Y, NAITO T, MINH N V, et al. Almost periodic solutions of differential equations in Banach spaces [M]. London/New York: Taylor&Francis, 2002.